大学数学のアトリエ｜線形代数　第 5 章　線形写像

No.5　基底の変換

この回のゴール

- 基底の変換行列を求められる．
- 基底を取り替えたときの座標の変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ を使える．
- 表現行列の変換公式 $B = Q^{-1}AP$（線形変換なら $B = P^{-1}AP$）を導き，使える．
- 相似な行列で行列式・トレース・ランクが変わらないことを説明できる．

以下，V を n 次元のベクトル空間とする．

■ 1．基底の変換行列

No.4 例題 3 では，基底を取り替えると表現行列が対角行列になった．基底を取り替えたとき，座標や表現行列がどう変わるかを一般的に調べよう．

定義 1　基底の変換行列

V の 2 つの基底 $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$（古い基底），$(\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_n)$（新しい基底）について，新しい基底の各ベクトルを古い基底で表して

$$\boldsymbol{v}'_j = p_{1j}\boldsymbol{v}_1 + p_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{v}_n \qquad (j = 1, \dots, n)$$

とするとき，n 次正方行列 $P = (p_{ij})$ を，古い基底から新しい基底への**基底の変換行列**という．形式的には $(\boldsymbol{v}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)\,P$ と書ける．

作り方

新しい基底ベクトル $\boldsymbol{v}'_j$ の，古い基底に関する座標を第 j 列に並べる． P は，恒等写像 id_V の「定義域に新しい基底，値域に古い基底」をとった表現行列にほかならない．

例 1

$\mathbb{R}^n$ で，古い基底が標準基底なら，$\boldsymbol{v}'_j$ の座標は $\boldsymbol{v}'_j$ 自身なので

$$P = (\boldsymbol{v}'_1 \ \boldsymbol{v}'_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}'_n).$$

たとえば $\mathbb{R}^2$ で新しい基底 ${}^t(1, 1)$，${}^t(1, -1)$ なら $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

定理 1

基底の変換行列 P は正則である．新しい基底から古い基底への変換行列は P^{-1} である．

【証明】P は恒等写像（同型写像）の表現行列なので，No.4 定理 3 より正則で，逆向きの表現行列は P^{-1}．□

■ 2. 座標の変換

定理 2　座標の変換

$\boldsymbol{x} \in V$ の古い基底に関する座標を $\boldsymbol{x}$，新しい基底に関する座標を $\boldsymbol{x}'$ とすると

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \qquad \boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x}.$$

【証明】P は「新しい基底 → 古い基底」で見た恒等写像の表現行列なので，No.4 定理 1 より（新しい座標）に P を掛けると（古い座標）になる．（直接計算：$\sum_j x'_j \boldsymbol{v}'_j = \sum_j x'_j \sum_i p_{ij}\boldsymbol{v}_i = \sum_i \left(\sum_j p_{ij}x'_j\right)\boldsymbol{v}_i$.）　□

向きに注意

P は「新しい基底を古い基底で表した」行列だが，座標は「**新しい座標**に P を掛けると**古い座標**」になる．基底と座標で向きが逆になるので，混乱しやすい．迷ったら定義に戻って確かめよう．

例題 1

$\mathbb{R}[x]_2$ で，古い基底 $(1,\, x,\, x^2)$ から新しい基底 $(1,\, x-1,\, (x-1)^2)$ への変換行列 P を求めよ．また，$f = x^2 + 3x + 5$ の新しい基底に関する座標を求めよ．

【解答】 新しい基底を古い基底で表すと

$$1 = 1, \qquad x - 1 = -1 + x, \qquad (x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$$

なので，座標を列に並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f の古い座標は ${}^t(5,\, 3,\, 1)$ なので，新しい座標は

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第 4 章 No.3 例題 2 で $f = 9 + 5(x-1) + (x-1)^2$ と求めた結果と一致する．

■ 3. 表現行列の変換

定理 3　表現行列の変換公式

$f\colon V \to W$ を線形写像とする．V の基底を取り替える変換行列を P，W の基底を取り替える変換行列を Q とする．古い基底どうしに関する f の表現行列を A，新しい基底どうしに関する表現行列を B とすると

$$B = Q^{-1}AP.$$

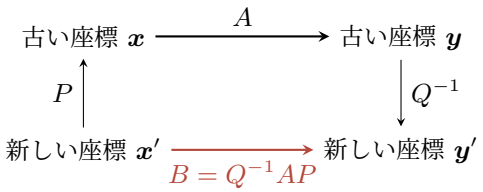
特に $V = W$（線形変換）で同じ基底の取り替え P を使うときは

$$B = P^{-1}AP.$$

【証明】 $\boldsymbol{x} \in V$ の古い座標を $\boldsymbol{x}$，新しい座標を $\boldsymbol{x}'$，$f(\boldsymbol{x})$ の古い座標を $\boldsymbol{y}$，新しい座標を $\boldsymbol{y}'$ とする．No.4 定理 1 と，この回の定理 2 より

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \qquad \boldsymbol{y} = Q\boldsymbol{y}'.$$

よって $Q\boldsymbol{y}' = AP\boldsymbol{x}'$ で，$\boldsymbol{y}' = Q^{-1}AP\boldsymbol{x}'$．これがすべての $\boldsymbol{x}'$ で成り立つので，新しい基底に関する表現行列は $Q^{-1}AP$．　□



新しい座標から出発して，P で古い座標に直し，A で移し，Q^{-1} で新しい座標に戻す．右から順に読む．

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP$ を計算し，No.4 例題 3 の結果と比べよ．

【解答】 $P^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

No.4 例題 3 で，基底 ${}^t(1, 1)$，${}^t(1, -1)$ に関する表現行列として直接求めたものと一致する．

例題 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が定める $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ について，$\mathbb{R}^3$ の基底 ${}^t(1, 1, 0)$，${}^t(0, 1, 1)$，${}^t(1, 0, 1)$ と，$\mathbb{R}^2$ の基底 ${}^t(1, 0)$，${}^t(1, 1)$ に関する表現行列を求めよ．

【解答】 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので

$$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

確認：$f_A{}^t(1, 1, 0) = {}^t(3, 1) = 2{}^t(1, 0) + 1{}^t(1, 1)$ で，B の第 1 列 ${}^t(2, 1)$ と一致．

■ 4. 相似な行列

定義 2　相似

n 次正方行列 A, B について，$B = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在するとき，A と B は**相似**であるという．

定理 3 より，相似な行列は「同じ線形変換を，別の基底で表したもの」である．したがって，線形変換そのものの性質を表す量は，相似な行列で同じ値をとるはずである．

定理 4　相似で変わらない量

$B = P^{-1}AP$ ならば

$$\det B = \det A, \qquad \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A, \qquad \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A.$$

【証明】det：第 3 章 No.2 練習問題 4 (3)．tr：第 1 章 No.2 練習問題 8 (1) の $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ より $\operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr} A$．rank：$\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im} f_B$ で，f_B と f_A は同じ線形変換を別の基底で表したものなので像の次元は等しい．（行列の言葉では，第 1 章 No.5 定理 3 (2) と $\operatorname{rank} {}^tX = \operatorname{rank} X$ から $\operatorname{rank}(P^{-1}AP) = \operatorname{rank}(AP) = \operatorname{rank} A$.） □

注意

この定理のおかげで，線形変換 $f\colon V \to V$ の**行列式** $\det f$ や**トレース** $\operatorname{tr} f$ を，「どれか 1 つの基底に関する表現行列の行列式・トレース」として，基底によらずに定義できる．

コラム：なぜ対角化したいのか

A が $P^{-1}AP = D$（対角行列）と対角化できれば，$A = PDP^{-1}$ なので

$$A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}.$$

対角行列の n 乗は対角成分を n 乗するだけなので，A^n が簡単に計算できる（練習問題 6）．どんな P を選べばよいか，そもそも対角化できるのはどんなときか，を調べるのが第 6 章である．

■ 練習問題

1. $\mathbb{R}^2$ で，標準基底から基底 $({}^t(1, 2), {}^t(3, 5))$ への変換行列 P を求め，${}^t(1, 1)$ の新しい基底に関する座標を求めよ．

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ について $P^{-1}AP$ を計算せよ．

3. 微分 $D\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ の，基底 $(1, x, x^2)$ に関する表現行列を A とする（No.4 練習問題 1）．基底を $(1, x-1, (x-1)^2)$ に取り替えたときの表現行列を，$P^{-1}AP$ で計算せよ．結果について気づいたことを述べよ．

4. 相似な行列について，次を示せ．

(1) A と A は相似．

(2) A と B が相似なら，B と A も相似.

(3) A が正則で，A と B が相似なら，B も正則.

5. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と E は相似でないことを示せ.（行列式・トレース・ランクはすべて等しいことにも注意しよう.）

6.（考えてみよう）練習問題 2 の結果を使って，自然数 n に対し A^n を求めよ.

■ 練習問題の解答

1. $P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $\det P=-1$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. 新しい座標は $P^{-1}{}^t(1,\,1)={}^t(-2,\,1)$. 確認：$-2{}^t(1,\,2)+{}^t(3,\,5)={}^t(1,\,1)$.

2. $P^{-1}=\dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $AP=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$ より

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

3. P, P^{-1} は例題 1 のもの. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ として計算すると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=A.$$

基底を取り替えても表現行列が変わらない. 実際，$D(1)=0$, $D(x-1)=1$, $D\big((x-1)^2\big)=2(x-1)$ で，新しい基底どうしの関係が古い基底のときとまったく同じ形をしている.

4. (1) $A=E^{-1}AE$. (2) $B=P^{-1}AP$ なら $A=PBP^{-1}=(P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$. (3) $\det B=\det A\neq 0$（定理 4）.

5. $P^{-1}EP=P^{-1}P=E$ なので，E と相似な行列は E だけ. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq E$ なので相似でない. このように，行列式・トレース・ランクが一致しても相似とは限らない.

6. 練習問題 2 より $A=P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}$ なので

$$A^n=P\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot 5^n+2^n & 5^n-2^n\\ 2\cdot 5^n-2^{n+1} & 5^n+2^{n+1}\end{pmatrix}.$$

（$n=1$ で A に戻ることを確かめておくとよい.）